

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi:

- Hội đồng Sáng kiến trường THPT Chuyên Quang Trung;
- Hội đồng Sáng kiến Ngành Giáo dục và Đào tạo Bình Phước;
- Hội đồng Sáng kiến tỉnh Bình Phước.

STT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tỉ lệ (%) đóng góp vào việc tạo ra sáng kiến
1	Trần Minh Hiền	28-04 -1981	THPT Chuyên Quang Trung	Tổ trưởng tổ Toán	Thạc sĩ	100%

- Là tác giả đề nghị xét công nhận sáng kiến: “Khai thác phương pháp đếm bằng hai cách trong giải toán tổ hợp dành cho học sinh giỏi”.
- Chủ đầu tư tạo ra sáng kiến: Trần Minh Hiền
- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Giáo dục và Đào tạo
- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu: 15/09/2018

Mô tả bản chất của sáng kiến
Tình trạng giải pháp đã biết:

-
- Các bài toán tổ hợp luôn là một bài toán bắt buộc phải có trong đề thi học sinh giỏi cấp quốc gia và quốc tế cũng như trong đề thi chọn đội tuyển của các tỉnh. Thông thường các bài toán này đều được xem ở mức độ khó. Có nhiều nguyên nhân học sinh giải không tốt phần này như: học sinh không được trang bị kiến thức về tổ hợp một cách bài bản; giáo viên dạy được phân môn này ở các trường rất ít; các bài toán tổ hợp đòi hỏi học sinh phải tổng hợp nhiều kỹ năng và khả năng suy luận logic,...
 - Phương pháp giải các bài toán tổ hợp khá đa dạng: bao gồm các nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn, quy nạp, phản chứng, nguyên lý bất biến và đơn biến, nguyên lý trung bình, các phương pháp đếm nâng cao: truy hồi, ánh xạ, hàm sinh, và các kỹ năng làm việc trên các đối tượng. Tài liệu giảng dạy học phần này trên thị trường hiện tại vẫn chưa có một tài liệu nào chính thống có thể tham khảo tốt cho học sinh và giáo viên. Tài liệu tiếng Anh có nhiều, nhưng để đọc hiểu được thì đòi hỏi người giáo viên phải có một trình độ tiếng Anh nhất định, vì phân môn này dùng cả ngôn ngữ đời thường và ngôn ngữ chuyên môn, gây khó khăn nhiều cho người đọc nếu ngoại ngữ không tốt.
 - Vì xu hướng thế giới, các đề thi học sinh giỏi cấp quốc gia và quốc tế tập trung rất nhiều vào tổ hợp. Các bài toán tổ hợp đôi khi giải quyết một vấn đề tối ưu trong cuộc sống. Việc viết ra một tài liệu để giảng dạy cho học sinh giỏi bậc trung học phổ thông (có thể tham khảo dạy cho các em học sinh giỏi cấp trung học cơ sở) là việc làm cấp thiết và có tính thực tiễn cao. Trước nhu cầu như vậy, bằng kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm ở phân môn này, tôi quyết định đầu tư để viết chuyên đề trên nhằm áp dụng hiệu quả cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi.
 - Viết một đề tài phục vụ cho nhiều đối tượng khác nhau là một việc khó khăn. Khó khăn đầu tiên là xác định kiến thức dạy nền tảng ở mức độ nào. Cần trang bị những kiến thức và kỹ năng cũng như những dạng toán nào để học sinh có thể tiếp thu và phát triển được chuyên đề. Khi đã dạy nền tảng xong, thì dạy nâng cao tiếp theo là gì, bổ sung thêm cái gì cũng là việc phải suy nghĩ.

Đứng trước thực tế đó, tôi đã nghiên cứu và đưa ra giải pháp cho việc giảng dạy nội dung này đạt hiệu quả hơn. Những điểm mới mà sáng kiến này đã làm được so với các tài liệu hiện hành là:

- + *Xác định rõ kiến thức và kỹ năng dạy nền, dạy nâng cao và những biến thể của phương pháp đếm bằng hai cách.*
- + *Chỉ ra các điều kiện cần có của mỗi bài toán để có thể tiếp cận bằng phương pháp này.*
- + *Xây dựng một hệ thống các ví dụ và bài tập tự giải đủ để học sinh hiểu về phương pháp và vận dụng vào giải toán được.*

Tiến trình xây dựng bài giảng này minh họa các điểm mới của sáng kiến đã được đề cập ở trên.

ĐẾM BẰNG HAI CÁCH

Đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ là hai tập hợp hữu hạn. Tích Decartes của hai tập A và B là tập các cặp sắp thứ tự dạng (a_i, b_j) , nghĩa là

$$A \times B = \{(a_i, b_j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Cho S là tập con của $A \times B$. Với mỗi $a_i \in A$ đặt

$$S(a_i, *) = \{(a_i, b) \in S\}$$

và với mỗi $b_j \in B$ đặt

$$S(*, b_j) = \{(a, b_j) \in S\}.$$

Định lý Fubini

Cho m và n là hai số nguyên dương, đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ là hai tập hợp hữu hạn. Giả sử S là một tập con của $A \times B$, khi đó

$$|S| = \sum_{j=1}^n |S(*, b_j)| = \sum_{i=1}^m |S(a_i, *)|.$$

Chứng minh. Xét ma trận sau đây

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in S \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Khi đó $|S(*, b_j)|$ là tổng của các số ở cột thứ j . Tương tự $|S(a_i, *)|$ là tổng các số ở dòng thứ i . Do đó cả $\sum_{j=1}^n |S(*, b_j)|$ và $\sum_{i=1}^m |S(a_i, *)|$ là tổng của tất cả các số trong toàn bộ ma trận M , nên phải bằng nhau. Từ đó ta có điều phải chứng minh. \square

Những bài toán nào có thể giải được bài phương pháp này. Thông thường phải là những bài toán liên quan đến hai đối tượng A và B :

- Mỗi phần tử $a \in A$ có quan hệ với một số phần tử $b \in B$.

- Mỗi phần tử $b \in B$ phải có một quan hệ với một số phần tử $a \in A$.

1. CÁC VÍ DỤ DẠY NỀN

VÍ DỤ 1. Mỗi học sinh lớp 12A quen với đúng 9 học sinh của lớp 12B, mỗi học sinh lớp 12B quen với đúng 8 học sinh của lớp 12A. Biết rằng tổng số học sinh của hai lớp là 85. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Bài toán có hai dấu hiệu quan trọng:

- Mỗi học sinh lớp A quen với đúng 9 học sinh lớp B.
- Mỗi học sinh lớp B quen với đúng 8 học sinh lớp B.

Giải. Ta đếm số lượng tập hợp

$$N = \{(a, b) : a \in 12A, b \in 12B, a, b \text{ quen biết nhau}\}.$$

Gọi m, n lần lượt là số học sinh lớp 12A và 12B thì ta có $m + n = 85$.

- Đếm theo a : có m cách chọn a . Với mỗi cách chọn a có 9 cách chọn b . Do đó $|N| = 9m$.
- Đếm theo b : có n cách chọn b . Với mỗi cách chọn b có 8 cách chọn a . Do đó $|N| = 8n$.

Vậy ta được $9m = 8n$. Từ đây kết hợp với $m + n = 85$, giải ra $m = 40, n = 45$. \square

VÍ DỤ 2. Trong một lớp học có b giáo viên và c sinh viên thỏa mãn hai điều kiện dưới đây:

1. Mỗi giáo viên dạy đúng k sinh viên;
2. Với hai sinh viên tùy ý, có đúng h giáo viên dạy họ.

Chứng minh rằng $\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$.

Bài toán có hai dấu hiệu quan trọng:

- Giáo viên với học sinh: mỗi giáo viên dạy đúng k sinh viên.
- Học sinh với giáo viên: hai sinh viên tùy ý, có đúng h giáo viên dạy họ.

Giải. Ta đếm số lượng tập hợp

$$M = \{((A, B), T) \mid \text{giáo viên } T \text{ dạy cả hai sinh viên } A, B\}.$$

1. *Đếm theo chỉ số (A, B) .* Số cách chọn cặp sinh viên (A, B) trong số c sinh viên là $\binom{c}{2}$. Lấy một cặp sinh viên (A, B) trong số đó, thì theo giả thiết thứ 2, có chính xác h giáo viên dạy họ, tức là có h cách chọn T . Do đó

$$|M| = h \times \binom{c}{2}.$$

2. *Đếm theo chỉ số T .* Theo giả thiết bài toán, có b cách chọn T . Với một giáo viên T trong số đó, thì do T dạy đúng k sinh viên, nên sẽ có $\binom{k}{2}$ cách chọn cặp sinh viên (A, B) để T dạy cả A và B . Do vậy

$$|M| = b \times \binom{k}{2}.$$

Tổng hợp hai cách đếm trên suy ra được

$$b \times \binom{k}{2} = h \times \binom{c}{2} \Rightarrow \frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

□

VÍ DỤ 3. Cho $n \geq 1$ là số tự nhiên. Chứng minh đẳng thức sau

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Vế phải của đẳng thức là số cách chọn n phần tử trong tổng số $2n$ phần tử phân biệt. Nhưng ở vế trái, với chú ý $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, tức là cũng chọn ra n phần tử, nhưng một loại chọn k phần tử, một loại chọn $n-k$ phần tử. Do vậy ta chia $2n$ đối tượng thành hai loại, mỗi đối tượng một loại.

Giải. Ta phát biểu bài toán đếm sau: "Có $2n$ học sinh, gồm n học sinh trường A và n học sinh trường B . Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra n học sinh đi tham dự đại hội thanh niên tiên tiến".

Ta giải quyết bài toán trên theo hai cách đếm sau.

Cách 1. Số cách chọn ra n học sinh từ $2n$ học sinh là $\binom{2n}{n}$.

Cách 2 Ta thực hiện phép đếm phức tạp hơn như sau:

- Lấy ra 0 học sinh nam, và n học sinh nữ có $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2$;

- Lấy ra 1 học sinh nam, và $n - 1$ học sinh nữ có $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}^2$;
-;
- Lấy ra n học sinh nam, và 0 học sinh nữ có $\binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} = \binom{n}{n}^2$.

Vậy tổng số có

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

cách chọn. Từ hai cách đếm trên ta có điều phải chứng minh. \square

VÍ DỤ 4. Một cuộc họp có $12k$ người và mỗi người bắt tay với đúng $3k + 6$ người còn lại, với k nguyên dương. Biết rằng với mọi cách chọn cặp hai người, số người bắt tay với cả hai là như nhau. Tính số người trong cuộc họp.

Bài toán này có hai yếu tố quan trọng

- Mỗi người bắt tay với $3k + 6$ người, do đó mỗi người sẽ không bắt tay với $12k - 1 - (3k + 6) = 9k - 5$ người.
- Mọi cặp hai người (A, B) tùy ý, thì số người bắt tay với cả hai là như nhau. Điều này đúng cho cả cặp (A, B) mà A không bắt tay B .

Chứng minh. Ta sẽ đếm số lượng tập hợp, với A, B, C là các người trong cuộc họp

$$Z = \{((A, B), C) \mid A, B \text{ không bắt tay nhau, } C \text{ bắt tay với cả } A \text{ và } B\}.$$

1. *Đếm theo chỉ số (A, B) .*

- Đầu tiên chọn người A . Có tất cả $12k$ cách.
- Với mỗi cách chọn A , chọn ra người B không bắt tay với A , số cách là

$$12k - 1 - (3k + 6) = 9k - 7.$$

- Khi có cặp (A, B) , theo giả thiết bài toán, số người bắt tay với cả hai người này là như nhau với mọi cách chọn (A, B) . Gọi đó là m .

Như vậy ta được $|Z| = 12k(9k - 7)m$.

2. *Đếm theo chỉ số C .*

- Đầu tiên chọn ra người C tùy ý, có $12k$ cách chọn.
- Tiếp theo, chọn ra một người A mà C bắt tay với A , có $3k + 6$ cách chọn A .

- Cuối cùng, chọn ra người B bắt tay với C nhưng không bắt tay với A . Ta thấy rằng có m người bắt tay với cả A, C nên có $3k + 5 - m$ người bắt tay với C nhưng không bắt tay với A .

Do đó $|Z| = 12k(3k + 6)(3k + 5 - m)$.

Tổng hợp hai cách đếm trên, ta được

$$12k(9k - 7)m = 12k(3k + 6)(3k + 5 - m) \Rightarrow m = \frac{3(k + 2)(3k + 5)}{12k - 1}.$$

Vì m là số nguyên dương, do đó vế phải là số nguyên dương. Dùng phép chia đa thức ta tìm được $k = 3$, và khi đó $m = 6$. Vậy số người trong cuộc họp là 36. Cấu hình dưới đây là một trường hợp thỏa mãn (*sắp xếp 36 người này trên bảng 6×6 , và mỗi người mặc một màu áo như chỉ ra. Mỗi người chỉ biết các người trên cùng dòng hoặc trên cùng cột hoặc mặc cùng màu áo*). \square

R	O	Y	G	B	V
V	R	O	Y	G	B
B	V	R	O	Y	G
G	B	V	R	O	Y
Y	G	B	V	R	O
O	Y	G	B	V	R

R=màu đỏ
O=màu cam
Y=màu vàng
G=màu xanh
B=màu xanh dương
V=màu tím

VÍ DỤ 5. Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Một hoán vị của tập $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ được gọi là **hoán vị cố định** $a \in A$ nếu như phần tử a ở nguyên vị trí cũ của nó trong hoán vị mới (nếu f là một hoán vị cố định a thì $f(a) = a$). Kí hiệu $P_n(k)$ là số hoán vị cố định đúng k phần tử của A . Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^n k.P_n(k) = n!.$$

Như ta đã biết, tập A có $n!$ hoán vị. Để ý hai thông tin quan trọng:

- Một phần tử $a \in A$ có thể là phần tử cố định của nhiều hoán vị f .
- Trong một hoán vị f của A có thể có nhiều phần tử cố định a .

Giải. Với mỗi phần tử $x \in A$ và một hoán vị f trong tập P_n các hoán vị của A . Ta đi đếm số lượng tập hợp

$$M = \{(x, f) \mid \text{phần tử } x \text{ là điểm cố định của hoán vị } f\}.$$

1. Đếm theo phần tử x . Có n cách chọn phần tử $x \in A$. Với mỗi phần tử $x \in A$ cho trước, có tất cả $(n - 1)!$ hoán vị nhận x làm điểm cố định (tức có $(n - 1)!$ cách chọn f). Do đó

$$|M| = n \times (n - 1)! = n!.$$

2. *Đếm theo hoán vị f .* Với k cố định, xét hoán vị $f \in P_n(k)$. Rõ ràng có $P_n(k)$ cách chọn hoán vị f . Với mỗi hoán vị $f \in P_n(k)$ cho trước, thì f có k điểm cố định là x_1, x_2, \dots, x_k . Tức là ta có k cách chọn phần tử x . Do đó

$$|M| = \sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k).$$

Tổng hợp hai cách đếm trên ta có điều phải chứng minh. \square

VÍ DỤ 6. Bên trong hình vuông cho 1000 điểm. Trong số 1004 điểm (1000 điểm bên trong hình vuông và 4 điểm là bốn đỉnh của hình vuông) không có ba điểm nào thẳng hàng. Ta nối các cặp điểm trong 1004 điểm này bởi các đoạn thẳng sao cho hình vuông bị chia hoàn toàn thành các tam giác nhỏ hơn (các cạnh của các tam giác này là các đoạn thẳng được nối và kể các cạnh của hình vuông ban đầu, và bất cứ hai đoạn thẳng nào đều không có điểm chung, ngoại trừ điểm đầu mút). Tìm số các đoạn thẳng và số các tam giác được chia ở hình thu được?

Một điểm nằm trong hình vuông là đỉnh của nhiều tam giác. Do tổng tất cả các góc chung nhau một đỉnh bằng 360° , nhưng các góc này lại nằm trong những tam giác khác nhau. Do đó tính tổng các góc có chung đỉnh theo hai cách khác nhau là chìa khóa giải bài toán.

Giải. Giả sử có tất cả l đoạn thẳng và k tam giác ở trong hình. Trước tiên ta đi đếm **số tam giác trong hình**.

Cách 1. Mỗi tam giác có tổng các góc trong bằng 180° . Do có tất cả k tam giác nên tổng các góc trong của tất cả k tam giác (cũng là tổng tất cả các góc của 1004 điểm) là

$$k \times 180^\circ.$$

Cách 2. Mỗi điểm trong hình vuông có tổng tất cả các góc có đỉnh là điểm đó bằng 360° . Vì có 1000 điểm trong hình vuông, nên tổng tất cả các góc của 1000 điểm là $1000 \times 360^\circ$. Ngoài ra có 4 đỉnh là 4 đỉnh của hình vuông, tổng tất cả các góc có chung đỉnh là đỉnh của hình vuông bằng 90° , do đó tổng tất cả các góc của 4 đỉnh hình vuông bằng $4 \times 90^\circ$. Từ đó tổng tất cả các góc của 1004 điểm trong hình là

$$1000 \times 360^\circ + 4 \times 90^\circ.$$

Từ hai cách đếm trên suy ra

$$k \times 180^\circ = 1000 \times 360^\circ + 4 \times 90^\circ \implies k = 2002.$$

Ta đi đếm số các đoạn thẳng.

Cách 1. Vì có k tam giác, mỗi tam giác có ba cạnh, nên có tổng cộng $3k$ cạnh trong k tam giác (có một số cạnh được tính hai lần).

Cách 2. Mỗi một đoạn thẳng được nối ở trong hình vuông là cạnh chung của hai tam giác và mỗi cạnh của hình vuông là cạnh của một tam giác. Do đó có tất cả là $2l + 4$

cạnh.

Từ hai cách đếm trên suy ra

$$3k = 2l + 4 \implies l = \frac{3}{2}k - 2 = 3001.$$

□

VÍ DỤ 7. Xét một nhóm n người với n nguyên dương và $n \leq 475$. Hai người bất kỳ trong nhóm quen nhau hoặc không quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương $m \geq 10$ sao cho có thể chia nhóm này thành m nhóm nhỏ phân biệt, đánh số từ 1 đến m sao cho: mỗi người nhóm i quen với đúng j người ở nhóm j với i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của n .

Bài toán này có giả thiết thiết tương tự như ví dụ 1, với thông tin quan trọng "người ở nhóm i quen với đúng j người ở nhóm j . Và cũng hoàn toàn giống ví dụ 1, ta cần phải kiểm soát số lượng của mỗi nhóm.

Chứng minh. Nếu gọi a_1, a_2, \dots, a_{100} lần lượt là số học sinh của các nhóm $1, 2, \dots, m$, theo giả thiết đề bài

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = n.$$

Ta đếm số lượng tập hợp

$$Z = \{(a_i, a_j) \mid a_i \text{ là người ở nhóm } i \text{ quen với } a_j \text{ là người ở nhóm } j, 1 \leq i < j \leq m\}.$$

Thực hiện đếm giống như ví dụ 1, ta được

$$|Z| = ia_j = ja_i,$$

hay là

$$\frac{a_i}{i} = \frac{a_j}{j}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_m}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{1 + 2 + \dots + m} = \frac{2n}{m(m+1)}.$$

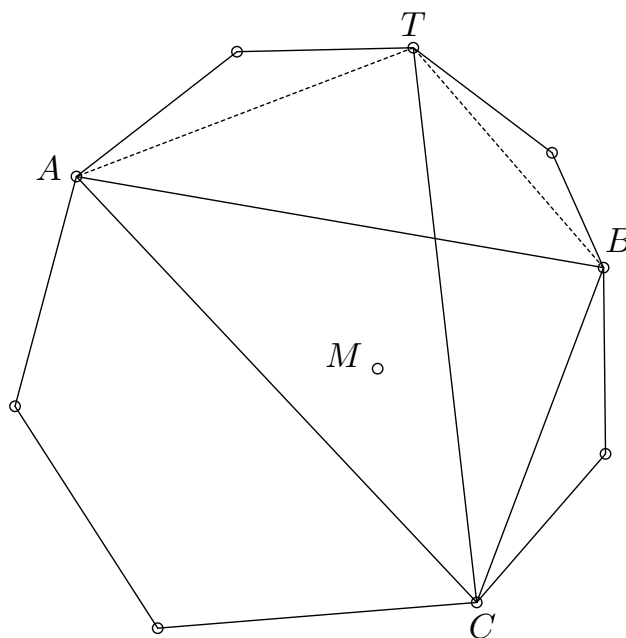
Chú ý là $m \geq 10$ nên $\frac{m(m+1)}{2} \geq 55$. Do đó n chia hết cho số có dạng $\frac{m(m+1)}{2}$ và $n \leq 475$ nên kiểm tra trực tiếp, ta thấy giá trị lớn nhất của n là 468, ứng với $m = 12$. □

VÍ DỤ 8. Cho đa giác lồi P có 2018 đỉnh. Lấy điểm M nằm trong đa giác P sao cho M không nằm trên một đường chéo nào của P . Gọi m là số tam giác chứa điểm M và có cả 3 đỉnh là đỉnh của P . Chứng minh rằng m là một số chẵn.

Giả thiết bài toán này rất khó khai thác, vì không thấy được một quan hệ liên thuộc nào rõ ràng. Nhưng nếu để ý kỹ giả thiết: "điểm M không nằm trên bất kỳ một đường chéo nào". Khi đó với hai đường chéo bất kỳ của P , sẽ có đúng hai tam giác có ba đỉnh nằm trên P và chứa M . Do đó ta sẽ đi tính số tứ giác chứa điểm M theo số tam giác chứa điểm M .

Giải. Xét một tam giác T tùy ý chứa điểm M và có ba đỉnh là đỉnh của P .

1. Một mặt, mỗi đỉnh của P , mà không thuộc T , sẽ cùng với ba đỉnh của T tạo thành một tứ giác lồi chứa điểm M và có cả 4 đỉnh đều là đỉnh của P . Vì thế, tam giác T cho ta $2015(= 2018 - 3)$ tứ giác chứa điểm M và có cả 4 đỉnh là đỉnh của P . Suy ra, tổng số tứ giác (kể cả lậ) chứa điểm M và có cả 4 đỉnh là đỉnh của P là $2018.m$.



2. Mặt khác, vì điểm M không nằm trên bất cứ đường chéo nào của P nên trong mỗi tứ giác chứa M và có cả bốn đỉnh đều là đỉnh của P có đúng hai tam giác chứa M và có 3 đỉnh là đỉnh của P . Do đó trong cách tính trên, mỗi tứ giác **được tính lặp đúng hai lần**.

Từ hai cách đếm trên, số tứ giác đôi một khác nhau, mà mỗi tứ giác đều chứa M và có cả bốn đỉnh là đỉnh của P , bằng $\frac{2015 \times m}{2}$. Từ đây suy ra m phải là số chẵn. Bài toán được chứng minh. \square

VÍ DỤ 9. Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 23\}$ với họ Ω gồm k tập con có 15 phần tử của X , với k nguyên dương. Một tập con B có 16 phần tử của X được gọi là **tập mẹ** nếu tồn tại $A \in \Omega$ sao cho $A \subseteq B$. Gọi d là số tất cả các tập mẹ của Ω . Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{d}{k}$.

Quan hệ trong bài toán này có hai đặc điểm:

- Nếu tập B là tập mẹ của tập A , thì bỏ một phần tử trong B sẽ thu được một tập con A .
- Nếu A là tập con của tập mẹ B , thì bằng cách thêm vào A một phần tử ta được tập B .

Giải. Ta đếm số lượng tập hợp

$$S = \{(A, B) \mid A \in \Omega \text{ và } B \text{ là tập mẹ của tập } A\}.$$

- Đếm theo A : ta chọn một tập hợp A trong Ω , có k cách chọn. Số cách chọn tập mẹ B ứng với A bằng số số cách chọn thêm một phần tử nào đó thuộc tập $X \setminus A$ cho vào A và bằng $23 - 15 = 8$. Do đó

$$|S| = 8k.$$

- Đếm theo B : ta chọn một tập hợp B từ tập mẹ của Ω thì có d cách chọn. Để thu được một tập con có 15 phần tử từ B , ta chỉ cần loại đi một phần tử trong B và có 16 cách: *tuy nhiên, tập hợp mới thu được có thể thuộc hoặc không thuộc X* . Dẫn đến

$$|S| \leq 16d.$$

Như vậy, ta thu được $8k \leq 16d$ hay $\frac{d}{k} \geq \frac{1}{2}$. Vì đẳng thức xảy ra khi Ω chứa hết tất cả các tập con có 15 phần tử của X , khi đó $k = \binom{23}{15}$ và $d = \binom{23}{16}$ nên ta kết luận giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\frac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 10. Cho m, n là các số nguyên dương ($n \geq 2$). Đặt

$$S = \{1, 2, \dots, mn\}.$$

Đặt T là tập các tập con của S thỏa mãn 3 điều kiện:

1. Mỗi phần tử của T chứa đúng m phần tử;
 2. Mỗi cặp phần tử của T có nhiều nhất 1 phần tử chung;
 3. Mỗi phần tử của S thuộc đúng hai phần tử của T .
- a) Chứng minh rằng $|T| = 2n$;
b) Chứng minh $m \leq 2n - 1$;
c) Với mỗi số nguyên dương n , chỉ ra một cấu hình để $m = 2n - 1$.

Các quan hệ trong bài toán này khá rõ ràng. Để chứng minh ý a ta dùng hai giả thiết 1 và 3, để chứng minh ý b ta dùng hai giả thiết 1,2. Xây dựng một câu hình trong tổ hợp thì một cách có thể hướng đến là hình học.

Giải. a) Ta đi đếm số lượng tập

$$Z = \{(a, A) \mid a \in S, A \in T, a \in A\}.$$

- (a) Đếm theo chỉ số a . Có mn cách chọn a trong S . Chọn một phần tử a cố định, theo giả thiết thứ 3 có hai phần tử A trong T chứa a , tức là có hai cách chọn A . Do đó $|Z| = 2mn$.
- (b) Đếm theo chỉ số A . Có $|T|$ cách chọn tập A trong T . Với mỗi tập A trong T , theo giả thiết thứ nhất $|A| = m$, do đó có m cách chọn phần tử a trong S (thực ra là trong A) để $a \in A$. Do đó $|Z| = m \cdot |T|$.

Từ hai cách đếm trên, suy ra

$$m \cdot |T| = 2mn \Rightarrow |T| = 2n.$$

b) Ta đi đếm số lượng tập hợp

$$K = \{(a, (A, B)) \mid \text{phần tử } a \in S \text{ là phần tử chung của hai tập } A, B, \text{ với } A, B \in T\}.$$

- (a) Đếm theo chỉ số a . Có mn cách chọn phần tử $a \in S$. Với mỗi phần tử a cố định, theo giả thiết thứ ba, có duy nhất một cách chọn (A, B) . Do đó

$$|K| = mn.$$

- (b) Đếm theo chỉ số (A, B) : Vì $|T| = 2n$ nên có $\binom{2n}{2}$ cách chọn hai tập hợp A, B trong T . Với hai tập A, B trong T , theo giả thiết thứ 2, có không quá một cách chọn phần tử a để $a \in A \cap B$. Do đó

$$|K| \leq \binom{2n}{2} = n(2n - 1).$$

Từ hai cách đếm trên suy ra

$$mn \leq n(2n - 1) \Rightarrow m \leq 2n - 1.$$

- c) Xét tập T gồm $2n$ đường thẳng, hai đường thẳng bất kỳ trong T đều cắt nhau và không có ba đường thẳng nào trong T đồng quy. Xét tập S là các giao điểm của các đường thẳng trên, khi đó $|S| = \binom{2n}{2} = n(2n - 1)$. Dễ dàng kiểm tra các tập S và T thỏa mãn đề bài.

□

VÍ DỤ 11. Một bảng ô vuông kích thước 15×15 được chia thành các hình vuông đơn vị 1×1 . Mỗi đỉnh của hình vuông đơn vị được tô bởi hai màu xanh hoặc đỏ. Người ta thấy có tổng cộng 133 đỉnh màu đỏ. Trong số các đỉnh màu đỏ có 2 đỉnh nằm ở vị trí góc của bảng 15×15 , và có 32 đỉnh nằm trên cạnh của hình vuông 15×15 . Người ta thực hiện tô màu các cạnh của hình vuông đơn vị theo quy tắc sau: Nếu hai điểm mút của nó màu đỏ, thì cạnh nối chúng được tô màu đỏ; nếu hai điểm mút của nó màu xanh thì cạnh nối chúng được tô màu xanh; nếu hai điểm đầu mút khác màu thì cạnh đó được tô màu vàng. Sau khi thực hiện việc tô màu các cạnh, người ta đếm được có tất cả 196 cạnh hình vuông đơn vị được tô màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cạnh hình vuông đơn vị được tô màu xanh?

Phân tích kỹ ta thấy bài toán tập chung vào 133 đỉnh màu đỏ, với hai quan hệ:

- Nếu hai đỉnh là đỏ thì cạnh nối chúng sẽ được tô màu đỏ.
- Một cạnh được tô màu vàng nếu hai đỉnh của nó gồm một đỉnh màu đỏ và một đỉnh màu xanh.

Do đó ta chỉ cần đếm số lượng đỉnh màu đỏ theo hai cách.

Giải. Tổng cộng có 480 cạnh hình vuông đơn vị trong bảng vuông 15×15 . Có tất cả $480 - 196 = 284$ cạnh hoặc là màu đỏ hoặc là màu xanh. Giả sử có tất cả r cạnh màu đỏ. Khi đó có $284 - r$ cạnh màu xanh.

Tiếp theo ta đi tính "sự xuất hiện" các điểm đầu mút màu đỏ (đóng vai trò là hai điểm đầu mút của mỗi cạnh đơn vị) theo hai cách khác nhau. Gọi $|S|$ là tổng số "sự xuất hiện" điểm đầu mút màu đỏ.

Cách 1. Mỗi cạnh màu đỏ sẽ kéo theo hai điểm đầu mút màu đỏ, mỗi cạnh màu vàng có 1 đỉnh màu đỏ, cạnh màu xanh không có đỉnh đầu mút màu đỏ. Do đó

$$|S| = 2r + 196.$$

(ở đây các đỉnh màu đỏ có thể được tính lặp lại vì nó có thể là đỉnh chung của nhiều cạnh màu đỏ hoặc màu vàng).

Cách 2. Mỗi một đỉnh màu đỏ nằm ở góc của bảng ô vuông được tính lặp 2 lần (cho hai cạnh xuất phát từ đỉnh đó), mỗi đỉnh màu đỏ nằm trên cạnh của bảng ô vuông được tính lặp lại 3 lần, và mỗi đỉnh màu đỏ nằm bên trong bảng ô vuông được tính lặp lại 4 lần. Do đó

$$S = 2 \times 2 + 32 \times 3 + (133 - 2 - 32) \times 4 = 496.$$

Từ hai cách tính trên ta được

$$2r + 196 = 496 \implies r = 150.$$

Vậy có tất cả $284 - 150 = 135$ cạnh màu xanh. □

Dưới đây là một số bài tập tự giải để rèn luyện thêm

BÀI TẬP 1. Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng

1. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$.
2. $\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

BÀI TẬP 2. Trong một rạp xiếc, có n chú hề được trang điểm bằng một số trong tổng cộng 12 màu sơn. Mỗi chú hề phải sử dụng ít nhất 5 màu và không có hai chú hề nào được trang điểm bằng cùng một tập hợp màu giống nhau. Ngoài ra, mỗi màu phải sử dụng bởi không quá 20 chú hề. Tìm giá trị lớn nhất của n .

BÀI TẬP 3. Tại một hội nghị có 100 đại biểu, trong đó có 15 người Pháp và 85 người Đức. Mỗi người Pháp quen với ít nhất 70 đại biểu, mỗi người Đức quen với không quá 10 đại biểu. Học được phân vào 21 phòng. Chứng minh rằng tồn tại một phòng nào đó không chứa một cặp nào quen nhau.

BÀI TẬP 4. Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong hai màu: đỏ hoặc xanh. Gọi A_1, A_2, \dots, A_{68} là các tập con của S mà mỗi tập chứa đúng năm điểm thỏa mãn đồng thời:

1. Mỗi tập trong A_1, A_2, \dots, A_{68} chứa đúng một điểm đỏ;
 2. Với ba điểm bất kỳ trong S , tồn tại đúng một tập A_i chứa cả ba điểm đó.
1. Tìm số phần tử của S .
 2. Tồn tại hay không một tập con A_i chứa bốn hoặc năm điểm đỏ? Vì sao?

BÀI TẬP 5. Cho m, n là các số nguyên dương lớn hơn 1. Một nhóm có n học sinh được phân hoạch thành m nhóm nhỏ sao cho

1. Mỗi nhóm có số thành viên bằng nhau.
2. Hai nhóm tùy ý có đúng một thành viên chung.
3. Hai thành viên tùy ý tham gia chung đúng một nhóm.

Chứng minh rằng $2(m+n) - 3$ là số chính phương.

BÀI TẬP 6. Trong một trường trung học phổ thông, có 2007 học sinh nam và 2007 học sinh nữ. Mỗi học sinh tham gia không quá 100 câu lạc bộ ở trường. Biết rằng hai học sinh bất kỳ khác giới tính đều tham gia ít nhất 1 câu lạc bộ chung nào đó. Chứng minh rằng có 1 câu lạc bộ mà có ít nhất 11 thành viên nam và 11 thành viên nữ.

2. CÁC VÍ DỤ NÂNG CAO (DÙNG BỒI DƯỠNG THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA)

VÍ DỤ 12. 1. Có tám ca sĩ tham gia một chương trình văn nghệ với tổng cộng m buổi hòa nhạc. Trong mỗi buổi hòa nhạc, có 4 ca sĩ tham gia và số lần tham gia của mỗi cặp ca sĩ là như nhau và bằng $n > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m .

2. Cho bát giác lồi A_1, A_2, \dots, A_8 mà không có ba đường chéo nào đồng quy. Giao của hai đường chéo tùy ý được gọi là một "nút". Xét tất cả các tứ giác lồi được tạo thành bởi bốn đỉnh của bát giác đã cho và các tứ giác đó gọi là "tứ giác con". Hãy xác định số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể tô màu n nút để với mọi i, k phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, 8\}$ thì các số $s(i, k)$ bằng nhau, với $s(i, k)$ ký hiệu là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và giao của hai đường chéo là một nút được tô màu.

Hai quan hệ qua lại vẫn đảm bảo trong bài toán này:

- Mỗi buổi hòa nhạc có 4 ca sĩ tham gia.
- Mỗi cặp ca sĩ bất kỳ, số lần tham gia chương trình văn nghệ bằng nhau.

Ý thứ hai của bài toán để cho thấy hình thức bài toán thay đổi, nhưng bản chất không thay đổi.

Chứng minh. 1. Ta sẽ đếm số bộ

$$Z = \{((A, B), C) \mid \text{với cặp ca sĩ } (A, B) \text{ tham gia buổi hòa nhạc } C\}.$$

- Đếm theo cặp ca sĩ (A, B) . Ta có $\binom{8}{2}$ cách chọn ra cặp hai ca sĩ. Từ đó chọn được đúng n buổi hòa nhạc mà hai ca sĩ này tham gia chung (*giả thiết bài toán*). Do đó $|Z| = n \binom{8}{2} = 28n$.
- Đếm theo buổi hòa nhạc C : Chọn ra một buổi hòa nhạc có m cách chọn. Với buổi hòa nhạc C , theo *giả thiết bài toán*, có 4 ca sĩ tham gia. Do đó sẽ có $\binom{4}{2} = 6$ cách chọn cặp ca sĩ (A, B) C . Do vậy $|Z| = 6m$.

Do vậy $28n = 6m \Rightarrow m = \frac{14n}{3}$. Vì m nguyên nên n chia hết cho 3, mà $n > 0$ nên $n \geq 3$. Suy ra $m \geq 14$ (khi đó mỗi ca sĩ phải tham gia 7 buổi hòa nhạc). Ta xây dựng sơ đồ sau để chứng tỏ số buổi biểu diễn ít nhất là 14.

2. Chú ý rằng số tứ giác con bằng với số "nút" (vì một nút xác định duy nhất bởi một tứ giác con), nên phần (b) có bản chất chính là phần (a) với các tương ứng
- tam ca sĩ ứng với tam đỉnh;
 - mỗi buổi hòa nhạc có bốn ca sĩ ứng với mỗi tứ giác con có bốn đỉnh.
 - mỗi cặp ca sĩ hát chung số lần bằng nhau ứng với mỗi cặp đỉnh $\{i, j\}$ có số $s(i, j)$ bằng nhau.

		BUỔI													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
CA SĨ	1	X	X	X				X	X	X	X				
	2	X	X	X								X	X	X	X
	3	X			X	X		X	X			X	X		
	4	X			X	X				X	X			X	X
	5		X		X		X	X		X		X		X	
	6		X		X		X		X		X		X		X
	7			X		X	X	X			X	X			X
	8			X		X	X		X	X			X	X	

Do đó đáp số bài này là 14.

□

VÍ DỤ 13. Trường phù thủy và pháp sư Howwarts có n học sinh. Các học sinh của trường rất hiếu động và tham gia vào nhiều câu lạc bộ khác nhau. Cả trường có tất cả m câu lạc bộ. Theo quy định của trường mà thầy hiệu trưởng Albus Dumbledore công bố thì mỗi câu lạc bộ phải có ít nhất hai thành viên. Nghiên cứu danh sách các câu lạc bộ của trường, Harry Potternhận thấy một điều thú vị sau đây: nếu hai câu lạc bộ nào đó có ít nhất hai thành viên chung thì hai câu lạc bộ sẽ có số thành viên khác nhau. Chứng minh rằng $m \leq (n - 1)^2$.

Bài toán vẫn có hai đặc trưng quan trọng:

- Một học sinh tham gia vào nhiều câu lạc bộ (cần có biến để kiểm soát số lượng của mỗi câu lạc bộ).
- Hai câu lạc bộ có ít nhất hai thành viên chung thì có số lượng khác nhau (do đó cần đếm đại lượng diễn đạt cặp học sinh cùng tham gia vào một câu lạc bộ có số phần tử cho trước).

Giải. Với mỗi $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, gọi a_i là số câu lạc bộ có số thành viên là i , khi đó theo giả thiết

$$m = a_2 + \dots + a_n.$$

Với mỗi $i = 2, 3, \dots, n$ ta đếm

$$Z = \{((A, B), C) \mid \text{cặp học sinh } (A, B) \text{ tham gia vào câu lạc bộ } C, |C|=i\}.$$

- Đếm theo câu lạc bộ C . Có a_i cách chọn C . Lấy một câu lạc bộ C , $|C| = i$ nên có $\binom{i}{2}$ cách chọn cặp học sinh (A, B) nằm trong câu lạc bộ C . Do đó

$$|Z| = a_i \binom{i}{2}.$$

- *Đếm theo cặp học sinh* (A, B) . Có $\binom{n}{2}$ cách chọn ra cặp học sinh (A, B) . Nếu C_1, C_2 là hai câu lạc bộ mà A, B cùng tham gia vào, thì theo giả thiết $|C_1| \neq |C_2|$ (dẫn đến cùng lắm chỉ có một trong hai câu lạc bộ này có số lượng phần tử bằng i). Do đó với mỗi cặp (A, B) chỉ có ≤ 1 cách chọn câu lạc bộ C . Dẫn đến

$$|Z| \leq \binom{n}{2}.$$

Từ đây suy ra $a_i \binom{i}{2} \leq \binom{n}{2}$, do đó $a_i \leq \frac{n(n-1)}{i(i-1)}, \forall i = 2, 3, \dots, n$. Như vậy

$$\begin{aligned} m &= a_2 + \dots + a_n \\ &\leq n(n-1) \left(\frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right) \\ &= n(n-1) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= n(n-1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) = (n-1)^2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. \square

VÍ DỤ 14. Một câu lạc bộ học thuật có n thành viên. Năm vừa rồi, họ có 6 buổi chuyên đề, mà mỗi buổi có 5 thành viên đứng ra tổ chức. Biết rằng, hai buổi bất kỳ chung nhau không quá hai thành viên tổ chức. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Tình huống này khá giống các bài trước, nhưng thông tin lại cho hơi ngược. Thay vì cho hai thành viên bất kỳ tổ chức chung bao nhiêu buổi thì đề bài lại cho hai buổi được tổ chức bởi bao nhiêu thành viên. Do đó thay vì đếm $((A, B), C)$, trong đó (A, B) là cặp học sinh tham gia tổ chức buổi chuyên đề C thì ta thay đổi buổi chuyên đề (A, B) được tổ chức bởi người C

Chứng minh. Ta đếm số bộ

$$Z = \{((A, B), C) \mid \text{buổi chuyên đề } (A, B) \text{ được tổ chức bởi người } C\}.$$

- *Đếm theo cặp* (A, B) . Có tất cả $\binom{6}{2} = 15$ cách chọn cặp (A, B) . Với một cách chọn cặp chuyên đề A, B , theo giả thiết bài toán, có không quá 2 người C đứng ra tổ chức. Do đó $|Z| \leq 2.15 = 30$.
- *Đếm theo thành viên* C . Gọi a_i là số buổi chuyên đề mà người thứ i đứng ra tổ chức ($i = 1, 2, \dots, n$). Theo giả thiết bài toán thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 30.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}|Z| &= \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_n}{2} = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{900}{n} - 30 \right).\end{aligned}$$

Từ hai cách đếm trên, suy ra

$$\frac{1}{2} \left(\frac{900}{n} - 30 \right) \leq 30 \Rightarrow n \geq 10.$$

Ta xây dựng một mô hình $n = 10$ thỏa mãn. Do đó giá trị nhỏ nhất của n là 10. \square

VÍ DỤ 15. Cho n và k là hai số nguyên dương và S là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng thỏa mãn hai tính chất:

- Không có ba điểm nào trong S thẳng hàng;
- Với mỗi điểm P trong S , tồn tại ít nhất k điểm khác trong S có cùng khoảng cách đến P .

Chúng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Nếu lấy hai điểm A, B bất kỳ trong S . Khi đó có hai thông tin quan trọng sau:

- Với mỗi điểm $P \in S$, tồn tại k điểm khác trong S là A_1, A_2, \dots, A_k mà $PA_1 = PA_2 = \cdots = PA_k$, tức P thuộc vào các đường trung trực của các đoạn thẳng $A_i A_j$ ($1 \leq i < j \leq k$).
- Theo giả thiết 1, trên mỗi đường trung trực đó có không quá 2 điểm của S nằm trên.

Giải. Đặt $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ là tập hợp gồm n điểm và đặt B là tập hợp các đường trung trực của các đoạn thẳng $P_i P_j$ ($1 \leq i < j \leq n$). Khi đó

$$|B| \leq \binom{n}{2}$$

(vì một đường trung trực có thể là đường trung trực chung của nhiều đoạn thẳng). Đến đây ta đếm số lượng tập hợp

$$Z = \{(M, \Delta) \mid M \in A, \Delta \in B \text{ và } M \in \Delta\}.$$

Ta đánh giá $|Z|$ theo hai cách sau.

1. *Đếm theo chỉ số M .* Có n cách chọn điểm M trong S . Với một cách chọn điểm M , theo giả thiết thứ hai, tồn tại ít nhất k điểm trong A có cùng khoảng cách đến P . Do đó M sẽ thuộc vào ít nhất $\binom{k}{2}$ đường trung trực của hai điểm trong số này, tức là có ít nhất $\binom{k}{2}$ cách chọn Δ . Do đó

$$|Z| \geq n \binom{k}{2}.$$

2. *Đếm theo chỉ số Δ .* Do $\Delta \in B$ nên có không quá $\binom{n}{2}$ cách chọn Δ . Với mỗi đường Δ , theo giả thiết thứ 2, có không quá 2 cách chọn điểm $M \in S$ mà $M \in \Delta$. Do đó

$$|Z| \leq 2 \binom{n}{2}.$$

Kết hợp hai cách đếm ta được

$$n \binom{k}{2} \leq 2 \binom{n}{2} \Rightarrow k^2 - k - 2(n-1) \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

□

VÍ DỤ 16. Trong một kì thi có a thí sinh và số lẻ b giám khảo. Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử k là số thỏa mãn: với hai giám khảo bất kì thì số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau nhiều nhất là k . Chứng minh rằng $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Nếu mới đọc qua thì cảm giác bài toán này mới chỉ có một quan hệ "giám khảo với thí sinh" (hai giám khảo bất kì thì số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau $\leq k$). Tuy nhiên, nếu để ý thì một thí sinh với một giám khảo chỉ có hai trường hợp: đỗ hoặc trượt. Do đó nếu biết có bao nhiêu giám khảo cho thí sinh đó đỗ, bao nhiêu giám khảo cho thí sinh đó trượt thì ta có quan hệ thứ hai "thí sinh với giám khảo"

Giải. Ta đi đếm số lượng tập hợp

$$Z = \{(A, B), x\} \mid \text{cặp giám khảo } A, B \text{ cho cùng kết quả với thí sinh } x\}.$$

1. *Đếm theo chỉ số (A, B) .* Có tất cả $\binom{n}{2}$ cách chọn cặp giám khảo (A, B) . Gọi (A, B) là một cặp trong số này. Theo giả thiết, cặp giám khảo (A, B) cho kết quả giống nhau nhiều nhất là k thí sinh. Tức là có nhiều nhất k cách chọn x cho cặp (A, B) . Từ đó suy ra

$$|Z| \leq k \cdot \binom{b}{2} = k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \quad (1).$$

2. *Đếm theo chỉ số x .* Có a cách chọn thí sinh x . Xét một thí sinh x cố định, giả sử m giám khảo cho thí sinh x này đỗ $0 \leq m \leq b$, thì có $b - m$ giám khảo cho thí sinh này trượt. Suy ra có $\binom{m}{2}$ cách chọn cặp giám khảo (A, B) cho x cùng một kết quả đậu và có $\binom{b-m}{2}$ cách chọn cặp giám khảo (A, B) cho x cùng kết quả trượt. Do đó tổng số cặp giám khảo (A, B) đánh giá thí sinh x này cùng một kết quả là:

$$\binom{m}{2} + \binom{b-m}{2} = \frac{m(m-1) + (b-m)(b-m-1)}{2} = \frac{2.m^2 - 2m.b + b^2 - b}{2}.$$

Do đó

$$|Z| = a \cdot \frac{2.m^2 - 2m.b + b^2 - b}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được:

$$k \frac{b(b-1)}{2} \geq a \frac{2.m^2 - 2m.b + b^2 - b}{2} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{2.m^2 - 2m.b + b^2 - b}{b(b-1)} \quad (3).$$

Mặt khác:

$$2.m^2 - 2.b.m + b^2 - b = \frac{(2.m - b)^2 + (b-1)^2 - 1}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Do b lẻ nên $\frac{(b-1)^2}{2} \in \mathbb{Z}$, suy ra

$$2m^2 - 2.b.m + b^2 - b \geq \frac{(b-1)^2}{2} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

□

VÍ DỤ 17. Trong một trường học, có 10001 học sinh tổ chức các câu lạc bộ (một học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ). Các câu lạc bộ phối hợp với nhau để tổ chức các hoạt động xã hội. Biết rằng có k hoạt động xã hội thỏa mãn:

- mỗi cặp học sinh thuộc đúng một câu lạc bộ;
- với mỗi học sinh và mỗi hoạt động xã hội, học sinh này thuộc đúng một câu lạc bộ trong hoạt động xã hội tương ứng;
- mỗi câu lạc bộ có một số lẻ thành viên và nếu số thành viên là $2m + 1$ thì số hoạt động xã hội là m .

Tìm tất cả các giá trị có thể có của k .

Bài toán này vẫn có hai quan hệ cần có:

- *một học sinh tham gia nhiều câu lạc bộ (cần có biến để kiểm soát);*
- *Mỗi cặp học sinh thuộc đúng một câu lạc bộ.*

Tuy nhiên ở đây còn có thêm giả thiết thứ hai: học sinh thuộc câu lạc bộ và câu lạc bộ thuộc hoạt động xã hội. Do đó sẽ cần đếm thêm đại lượng biểu diễn quan hệ này, ngoài việc đếm các đại lượng của hai quan hệ quen thuộc trên.

Giải. Ta sẽ đếm tập

$$Z = \{(A, B, C) \mid \text{học sinh } A \text{ tham gia vào câu lạc bộ } B, B \text{ thuộc hoạt động xã hội } C\}.$$

theo hai cách.

- *Đếm theo cặp (A, C) .* Có 10001 cách chọn A và k cách chọn C . Với mỗi cặp (A, C) , theo giả thiết thứ 2 thì có duy nhất một cách chọn B thỏa mãn. Vậy

$$|Z| = 10001 \times k.$$

- *Đếm theo cặp (B, C) .* Gọi t là số câu lạc bộ và a_1, a_2, \dots, a_t là số thành viên của từng câu lạc bộ. Nếu câu lạc bộ B có a_i thành viên (tức có a_i cách chọn A), thì theo giả thiết thứ ba, B thuộc vào đúng $\frac{a_i - 1}{2}$ hoạt động xã hội. Theo điều kiện thứ hai thì

$$|Z| = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_n(a_n - 1)}{2}.$$

Từ đây ta có đẳng thức

$$10001k = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_n(a_n - 1)}{2}. \quad (1)$$

Ta xét thêm một bước đếm nữa bằng hai cách với số bộ T có dạng $((D, E), F)$ mà học sinh D, E thuộc về câu lạc bộ F .

- *Đếm theo câu lạc bộ F ,* ta có

$$T = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_n(a_n - 1)}{2}.$$

- *Đếm theo cặp học sinh (D, E) ,* ta có $T = \binom{10001}{2}$.

Như thế, ta thu được

$$T = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \cdots + \frac{a_n(a_n - 1)}{2} = \binom{10001}{2}.$$

Kết hợp hai kết quả trên, ta được

$$10001k = \binom{10001}{2} \Rightarrow k = 5000.$$

□

VÍ DỤ 18. Một trung tâm mở ra 7 lớp học hè. Biết rằng mỗi học sinh trong trung tâm tham gia ít nhất một trong các lớp học này. Số liệu thống kê sau 7 lớp học cho thấy mỗi lớp học có số học sinh tham dự bằng nhau và bằng 40. Ngoài ra cứ hai lớp học bất kỳ thì có không quá 9 học sinh học cả hai lớp đó. Chứng minh rằng trung tâm dạy học có ít nhất 120 học sinh tham dự các lớp học đó.

Bài toán này cũng có đầy đủ hai quan hệ:

- *Mỗi học sinh tham gia vào ít nhất một lớp học.*
- *Hai lớp học bất kỳ có không quá 9 học sinh tham gia.*

Do đó ta sẽ đếm số lượng bộ ba $((A, B), x)$ trong đó x là thí sinh tham gia học cùng hai lớp A, B . Tuy nhiên ta có thể trình bày khác đi bằng bảng ô vuông (thường gọi là ma trận liên kết, rất thuận lợi cho việc trình bày các bài toán đếm bằng hai cách)

Giải. Ký hiệu n là số học sinh tham dự các lớp học đó và với học sinh thứ j , ký hiệu a_j là số lớp học học sinh đó tham gia. Ta lập bảng có 7 hàng và n cột (mỗi hàng ứng với một lớp, mỗi cột ứng với một thí sinh). Ô (i, j) của dòng i và cột j được đánh dấu \times nếu học sinh j tham gia lớp i .

Tổng số các dấu \times nếu tính theo cột là $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, và tổng này bằng $7 \times 40 = 280$ (vì nếu tính theo dòng, mỗi lớp có 40 học sinh tham gia).

Bây giờ ta tính S là tổng số cặp (\times, \times) trên mỗi cột.

1. *Đếm theo từng cột.* Trên cột j có $\binom{a_j}{2}$ cặp, cho nên số S các cặp (\times, \times) trên n cột là

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_n}{2} = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Thay $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 280$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$$

$$\text{ta có } S \geq \frac{280^2}{2n} - 140.$$

2. *Đếm theo cặp dòng.* Với mỗi cặp 2 dòng, chỉ có nhiều lắm có 9 cột có cặp (\times, \times) trên 2 dòng này, cho nên tổng số các cặp (\times, \times) cùng cột trên tất cả $\binom{7}{2}$ cặp 2 dòng không vượt quá $9\binom{7}{2}$ cặp (\times, \times) .

Từ hai cách đếm trên, suy ra $9 \times \binom{7}{2} \geq S$. Từ đây ta có

$$9 \times \binom{7}{2} \geq \frac{280^2}{2n} - 140 \Rightarrow n > 119.$$

Vậy $n \geq 120$. Bài toán được chứng minh. \square

VÍ DỤ 19. Có 200 thí sinh tham gia trong một cuộc thi. Họ được đề nghị giải 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải đúng bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh rằng phải có 2 thí sinh mà với mỗi bài toán, có ít nhất một trong hai thí sinh này giải được bài toán đó.

Mặc dù vẫn có hai thông tin quan trọng: một thí sinh có thể giải nhiều bài toán khác nhau, và mỗi bài toán giải được ít nhất 120 thí sinh. Nhưng đề bài chứng minh sự tồn tại, mà trong các bài toán trước đây ta thấy, phương pháp đếm bằng hai cách cho ta kích thước các đối tượng. Do đó với những bài toán khẳng định sự tồn tại, ta có thể tiếp cận bằng phản chứng. Dưới đây trình bày phương pháp đếm thông qua ma trận liên kết.

Giải. Đặt $A = (a_1, a_2, \dots, a_{200})$ là tập hợp 200 thí sinh tham gia cuộc thi và $B = (b_1, b_2, \dots, b_6)$ biểu thị cho 6 bài toán. Xét ma trận liên kết M kích thước 6×200

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,200} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,200} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{61} & x_{62} & \cdots & x_{6,200} \end{pmatrix}$$

với

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu thí sinh } a_j \text{ **không** giải được bài toán } b_i \\ 0 & \text{trong các hợp khác.} \end{cases}$$

Ta giải bài toán bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng với hai thí sinh bất kỳ, tồn tại một bài toán mà cả hai cùng không giải được. Đặt N là số các cặp số $(1, 1)$ ở cùng 1 hàng. Ta đánh giá N theo hai cách sau.

Cách 1. Vì hai thí sinh bất kỳ luôn tồn tại một bài toán mà cả hai cùng không giải được. Phiên qua ngôn ngữ của ma trận thì với hai cột tùy ý, luôn có ít nhất một cặp số 1 trong hai cột này mà cùng một hàng. Vì có $\binom{200}{2}$ cách chọn hai cột, suy ra

$$N \geq \binom{200}{2} = 19900.$$

Cách 2. Theo giả thiết mỗi bài toán giải đúng bởi ít nhất 120 thí sinh. Phiên qua ngôn ngữ ma trận suy ra mỗi một hàng có tối đa 80 số 1. Tức là mỗi một hàng chỉ có tối đa $\binom{80}{2}$ cặp số (1,1). Do có tất cả 6 hàng nên

$$\mathcal{N} \leq 6 \times \binom{80}{2} = 18960.$$

Từ cách đếm trên suy ra $19000 \leq \mathcal{N} \leq 18960$ (vô lý). Vậy điều phản chứng là sai. Suy ra kết luận cho bài toán. \square

VÍ DỤ 20. Cho tập hợp $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{4n+3}\}$ là một tập hợp gồm $4n+3$ phần tử và $A_1, A_2, \dots, A_{4n+3}$ là $4n+3$ tập hợp con của M thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

- (1) Lấy bất kỳ $n+1$ phần tử trong M thì $n+1$ phần tử này luôn thuộc vào **đúng một tập** A_i nào đó ($1 \leq i \leq 4n+3$);
- (2) $|A_i| \geq 2n+1$ ($i = 1, 2, \dots, 4n+3$).

Chứng minh rằng $|A_i \cap A_j| = n, \forall 1 \leq i \neq j \leq 4n+3$.

Đây là một bài toán thuộc dạng tương tự các ví dụ trên, với hai giả thiết:

- $n+1$ phần tử bất kỳ trong M thuộc đúng vào một tập hợp.
- Mỗi tập hợp có ít nhất $2n+1$ phần tử.

Và bài toán quan tâm đến số phần tử của hai tập tùy ý. Khi đó chỉ cần đếm đại lượng $((A, B), x)$ với phần tử x là phần tử chung của hai tập A và B . Lời giải dưới đây trình bày theo hình thức ma trận liên kết để rèn luyện thêm kỹ năng trình bày theo hướng này.

Giải. Xét ma trận liên kết M kích thước $(4n+3) \times (4n+3)$

$$M = (a_{i,j})$$

với

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_i \in A_j \\ 0 & \text{nếu } x_i \notin A_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 4n+3).$$

Đặt

$$r_i = \sum_{j=1}^{4n+3} a_{ij}, \quad l_j = \sum_{i=1}^{4n+3} a_{ij},$$

khi đó r_i cho ta thông tin phần tử x_i thuộc vào r_i tập hợp trong số các tập $A_1, A_2, \dots, A_{4n+3}$ và l_j chính là số phần tử của tập hợp A_j , nghĩa là $|A_j| = l_j$. Từ điều kiện thứ hai ta được

$$\sum_{i=1}^{4n+3} r_i = \sum_{i=1}^{4n+3} \sum_{j=1}^{4n+3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{4n+3} |A_j| \geq (4n+3) \cdot (2n+1).$$

Đặt

$$S = \left\{ (x_k; A_i, A_j) \mid x_k \in A_i \cap A_j \right\}, i, j = 1, 2, \dots, 4n+3, k = 1, 2, \dots, 4n+3.$$

Ta ước lượng số phần tử của S theo hai cách sau.

1. *Đếm theo chỉ số cặp (A_i, A_j) .* Có $\binom{4n+3}{2}$ cách chọn cặp tập hợp (A_i, A_j) trong tổng số $4n+3$ tập hợp. Lấy hai tập A_i, A_j , từ điều kiện (1), thì $|A_i \cap A_j| \leq n$ nên có $\leq n$ cách chọn phần tử x_k . Do đó

$$|S| \leq \binom{4n+3}{2} \times n = n(4n+3)(2n+1).$$

2. *Đếm theo chỉ số x_k .* Mỗi phần tử x_k thuộc vào r_k tập hợp trong số các tập $A_1, A_2, \dots, A_{4n+3}$. Do đó có $\binom{r_k}{2}$ cách chọn cặp (A_i, A_j) . Do đó

$$|S| = \sum_{k=1}^{4n+3} \binom{r_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k \right).$$

Kết hợp hai cách đếm trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} n(4n+3)(2n+1) &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n+3} \left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k \right) \\ &= \frac{1}{2(4n+3)} \left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k \right) \left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k - (4n+3) \right) \\ &\geq \frac{1}{2(4n+3)} \cdot (2n+1)(4n+3) [(2n+1)(4n+3) - (4n+3)] \\ &= n(2n+1)(4n+3). \end{aligned}$$

Từ đó để dấu bằng xảy ra được thì trong bất đẳng thức trên thì dấu bằng phải xảy ra trong (*), tức hai tập A_i, A_j bất kỳ giao nhau có n phần tử chung. \square

VÍ DỤ 21. Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là *ẩn tượng* nếu như:

- Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau.

- Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

1. Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.
2. Chứng minh rằng nếu có một cách trồng cây ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

Chứng minh. Ta thay một loại cây là $+1$ và loại kia là -1 .

1. Vì số 2016 là số khá lớn, cho nên rõ ràng chúng ta phải xét hình chữ nhật có kích thước nhỏ hơn có thể trồng ấn tượng. Câu (b) của bài toán gợi ý rằng có thể trồng cây ấn tượng trong hình vuông 4×4 . Có hai cách sử dụng hình vuông này.

- Hoặc là ta chia hình vuông 2016×2016 thành các hình vuông 4×4 (gồm có 504 hình vuông loại này).
- Hoặc là ta chia thành các hình vuông 504×506 (gồm có 4 hình vuông loại này).

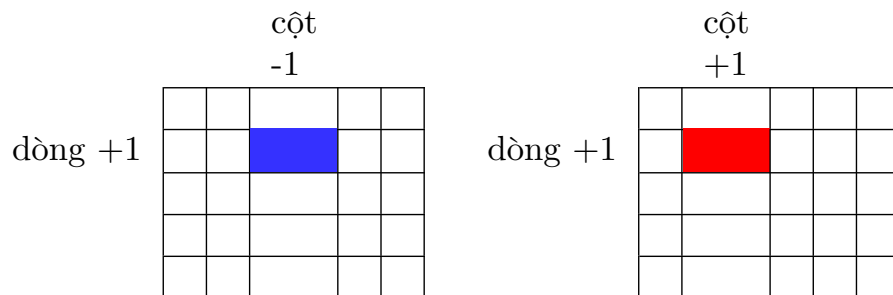
Bảng 4×4 ô vuông có một cách trồng ấn tượng như hình dưới đây Từ bảng ô

+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1
-1	-1	-1	+1

vuông này, ta ghép lại thành bảng 2016×2016 ô vuông có cách trồng cây ấn tượng. Hoặc ta coi mỗi ô là một hình vuông lớn kích thước 504×504 ô vuông và trồng trong hình vuông ứng với $+1$ (hoặc -1) toàn bộ 504×504 cây loại $+1$ (hoặc toàn bộ là -1). Và hai cách này là hai cách trồng cây thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Để chứng minh (b), ta chứng minh rằng khi có cách trồng cây ấn tượng thì (ii) đều phải trở thành đẳng thức cho mọi hàng và cột.
 - Ký hiệu m^+ là số hàng mà số cây $+1$ nhiều hơn cây -1 .
 - Ký hiệu m^- là số hàng mà số cây -1 nhiều hơn cây $+1$.
 - Ký hiệu m_0 là $m_0 = \min\{m^+, m^-\}$.
 - Ký hiệu n^+ là số cột mà số cây $+1$ nhiều hơn cây -1 .
 - Ký hiệu n^- là số cột mà số cây -1 nhiều hơn cây $+1$.
 - Ký hiệu n_0 là $n_0 = \min\{n^+, n^-\}$.

Ta ký hiệu S là số các cây gọi là *xấu* (là cây **trái loại** với loại cây chiếm đa số trên dòng **hoặc** trên cột chứa nó - *đây chính là tính chất toán học cho ta lời giải bài toán*). Mỗi cây trên dòng $+1$ (dòng nhiều $+1$ hơn -1) cắt cột -1 (cột có nhiều -1 hơn là $+1$) là một cây xấu (theo cột hoặc dòng) (như trong hình vẽ, nếu ô tô màu, giao của dòng $+1$ và cột -1 , nếu là số $+1$ thì là ô xấu với cột -1 , còn nếu là -1 thì là ô xấu với dòng $+1$, do đó ô này luôn là ô xấu). Ngoài ra, ô vuông là giao của dòng $+1$ và cột $+1$, hoặc giao của dòng -1 và cột -1 có thể là xấu hoặc không xấu (như hình minh họa, nếu ô vuông giao của dòng $+1$ và cột $+1$ là số $+1$ thì không phải là ô xấu, nhưng nếu là số -1 thì là ô xấu (của cả dòng và cột chứa nó)). Từ đây suy ra



$$S \geq m^+ \times n^- + m^- \times n^+.$$

Thay m^+, m^- bởi m_0 , ta có

$$S \geq m_0.n.$$

Tương tự ta có

$$S \geq n_0.m.$$

Cho nên

$$2S \geq m_0.n + n_0.m \Leftrightarrow \boxed{S \geq \frac{1}{2}(m_0n + n_0m)}.$$

Xét một dòng $+1$, theo giả thiết thứ 2 của bài toán thì

$$\begin{cases} \text{số cây } (+1) - \text{Số cây } (-1) \geq \frac{n}{2} \\ \text{số cây } (+1) + \text{Số cây } (-1) = n \end{cases} \Rightarrow \text{Số cây } (-1) \leq \frac{n}{4}.$$

Vì có m^+ dòng $+1$ nên số cây xấu -1 trên các dòng m^+ là $\leq \frac{1}{4}nm^+$, và số cây $+1$ trên các dòng -1 không vượt quá $\frac{1}{2}mn - \frac{3}{4}m^+n$, cho nên tổng số cây xấu theo dòng không vượt quá

$$\frac{1}{4}nm^+ + \frac{1}{2}mn - \frac{3}{4}m^+n = \frac{1}{2}m^-n.$$

Tương tự, số cây xấu theo dòng không vượt quá $\frac{1}{2}m^+n$, cho nên số cây xấu theo dòng không vượt quá $\frac{1}{2}m_0n$. Tương tự, số cây xấu theo cột không quá $\frac{1}{2}n_0m$. Vậy suy ra

$$S \leq \frac{1}{2}n_0m + \frac{1}{2}m_0n.$$

Từ hai đánh giá trên suy ra phải có đẳng thức tại mỗi bất đẳng thức. Từ các đẳng thức này, dễ dàng suy ra m, n đều là bội của 4. \square

Dưới đây là một số bài tập tự giải để rèn luyện thêm.

BÀI TẬP 7. Cho m sinh viên tham gia giải n bài toán, sinh viên làm đúng 1 bài được một điểm, làm sai không được điểm. Nhận thấy: mỗi sinh viên giải được ít nhất 1 bài và mỗi bài có ít nhất 1 sinh viên giải được. Hơn nữa, nếu sinh viên giải được một bài thì số điểm của sinh viên này bằng số người giải được bài đó. Chứng minh rằng $m = n$.

BÀI TẬP 8. Cho tập S gồm 2008 phần tử. Giả sử S_1, S_2, \dots, S_{50} là 50 tập con của S thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. $|S_i| = 100, \forall i = 1, 2, \dots, 50$;
2. $\bigcup_{i=1}^{50} S_i = S$.

Chứng minh rằng tồn tại hai tập $S_i, S_j (1 \leq i < j \leq 50)$ sao cho $|S_i \cap S_j| \geq 4$.

BÀI TẬP 9. Gọi a_1, a_2, \dots, a_9 là 9 số thực, không nhất thiết phân biệt. Trung bình cộng của 9 số này là m . Gọi N ký hiệu là bộ ba số (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 9$ sao cho $a_i + a_j + a_k \geq 3m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của N .

BÀI TẬP 10. Cho số nguyên dương $n > 1$, và xét n đa thức $P_1(x), \dots, P_n(x)$ sao cho mỗi đa thức có 3 nghiệm thực phân biệt. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình sau

$$P_1(x).P_2(x) \dots P_n(x) = 0.$$

Ngoài ra, với mỗi (i, j) mà $1 \leq i < j \leq n$, thì phương trình $P_i(x).P_j(x) = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

1. Chứng minh rằng nếu với mọi $a, b \in S$, tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $P_i(a) = P_i(b) = 0$ thì $n = 7$.
2. Chứng minh rằng nếu $n > 7$ thì $|S| = 2n + 1$.

BÀI TẬP 11. Trên mặt phẳng, cho bảy điểm phân biệt. Người ta muốn vẽ các đường tròn qua đúng bốn điểm trong bảy điểm này. Hỏi có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn.

BÀI TẬP 12. Cho X là một tập hợp hữu hạn với $|X| = n$, và đặt A_1, A_2, \dots, A_m là các tập con chứa 3 phần tử của X thỏa mãn $|A_i \cap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$. Chứng tỏ tồn tại tập con A của X chứa ít nhất $\lceil \sqrt{2n} \rceil$ phần tử mà không nhận bất cứ tập $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ nào là tập con của nó.

BÀI TẬP 13. Cho n điểm phân biệt trong mặt phẳng. Chứng minh rằng số cặp điểm có khoảng cách bằng 1 luôn nhỏ hơn $\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n^3}$.

3. SỰ ĐIỀU CHỈNH CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐẾM BẰNG HAI CÁCH (DÀNH CHO HỌC SINH THI VÒNG CHỌN ĐỘI TUYỂN THI QUỐC TẾ)

Có rất nhiều bài toán tổ hợp, hình thức phát biểu hơi hướng đếm bằng hai cách. Nhưng một là dấu bằng không xảy ra được (khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy), hoặc là điều kiện chặt áp dụng đếm bằng hai cách không suy ra vô lý, ... Với những bài toán này ta phải dùng thuật toán điều chỉnh địa phương, hoặc phản chứng và dùng thuật toán tham lam, kết hợp với Dirichlet thì bài toán mới giải quyết được. Dưới đây minh họa một số bài toán như vậy

VÍ DỤ 22. Trong một kỳ thi có 100 thí sinh và 24 vị giám khảo. Mỗi thí sinh được hỏi bởi đúng 10 giám khảo.

1. Chứng minh rằng có bảy giám khảo mà mỗi thí sinh đều được hỏi bởi ít nhất một trong số họ.
2. Câu hỏi tương tự khi thay 24 giám khảo bởi 25 giám khảo.

Giải. 1. Giả sử phản chứng, tức là với bảy giám khảo tùy ý thì luôn có ít nhất một thí sinh không được hỏi bởi bất kỳ ai trong số họ. Ta đi đếm số bộ S có dạng $(A_1, A_2, \dots, A_7, B)$ mà thí sinh B không được hỏi bởi các giám khảo A_1, A_2, \dots, A_7 .

(a) *Đếm theo giám khảo.* Ta có

$$S \geq \binom{24}{7} \times 1$$

(vì ứng với mỗi bộ bảy giám khảo, có ít nhất một thí sinh).

(b) *Đếm theo thí sinh.* Do mỗi thí sinh được hỏi bởi 10 giám khảo, nên sẽ không được hỏi bởi 14 giám khảo còn lại. Suy ra

$$S = 100 \times \binom{14}{7}.$$

Từ hai cách đếm trên, suy ra

$$100 \times \binom{14}{7} \leq \binom{24}{7}$$

nhưng điều này là vô lý. Vậy điều phản chứng sai, bài toán được chứng minh.

2. Nếu thực hiện tương tự như trên, ta có đánh giá

$$100 \times \binom{15}{7} \leq \binom{25}{7}$$

nhưng điều này đúng. Do đó để giải bài toán này, tức chỉ ra 7 giám khảo thỏa mãn đề bài, ta dùng thuật toán tham lam kết hợp với Dirichlet.

- Gọi A_1 là giám khảo hỏi nhiều thí sinh nhất. Khi đó, A_1 phải hỏi ít nhất là $\left\lceil \frac{10 \times 100}{25} \right\rceil = 40$ thí sinh. Loại giám khảo này cùng với 40 thí sinh được hỏi bởi ông ta, ta còn lại 24 giám khảo và 60 thí sinh.
- Gọi A_2 là giám khảo hỏi nhiều thí sinh nhất trong số 40 thí sinh còn lại. Khi đó A_2 phải hỏi ít nhất $\left\lceil \frac{10 \times 60}{24} \right\rceil = 25$ thí sinh. Lại tiếp tục làm quy trình như trên.
- Cứ tiếp tục quy trình này, ta sẽ tìm được bảy giám khảo A_1, A_2, \dots, A_7 mà mỗi thí sinh được hỏi bởi ít nhất một trong số họ.

□

VÍ DỤ 23. Viện toán VISAM tổ chức 6 buổi chuyên đề cho n sinh viên. Mỗi buổi có đúng 100 sinh viên tham gia. Biết rằng không có 2 sinh viên nào mà hợp lại tham gia đủ 6 buổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Giải. 1. Nếu có sinh viên A học đủ 5 buổi chuyên đề. Khi đó buổi còn lại, theo giả thiết, có 100 sinh viên tham gia. Lấy một sinh viên C trong số này. Khi đó hai sinh viên A, C hợp lại học đủ 6 buổi chuyên đề, mâu thuẫn.

2. Nếu có sinh viên A học đủ 4 buổi. Khi đó hai buổi chuyên đề còn lại (mỗi buổi 100 sinh viên) phải không giao nhau (vì nếu có sinh viên C học cả hai buổi chuyên đề đó, thì A, C hợp lại học đủ 6 buổi, mâu thuẫn). Do đó số sinh viên tối thiểu là 201 người (1).

3. Nếu số sinh viên là $n < 200$. Khi đó phải có một sinh viên tham gia $\left\lceil \frac{6 \times 100}{n} \right\rceil \geq 4$, tức là phải có một thí sinh học 4 buổi, nhưng theo (1) thì $n \geq 201$, mâu thuẫn.

4. Ta chứng minh $n = 200$ thỏa mãn bài toán (và mỗi người học 3 buổi). Việc chỉ ra một tổ hợp thỏa mãn không quá khó khăn.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $n = 200$.

□

VÍ DỤ 24. Một câu lạc bộ có n thành viên và họ đã tham gia vào 12 buổi chuyên đề, mỗi buổi có 24 thành viên tham gia. Biết rằng hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Nếu đếm số bộ số (A, B, C) với A, B là học sinh tham gia vào buổi C thì ta có đánh giá rất yếu và đẳng thức không xảy ra được. Cụ thể là $\binom{n}{2} \cdot 1 \geq 12 \cdot \binom{24}{2}$ và dẫn đến $n \geq 82$. Để cải thiện cách này, ta sử dụng nhận xét: "hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi, tương đương với hai buổi bất kỳ có chung nhau không quá một thành viên."

Chứng minh. Ta đi đếm số bộ S có dạng (A, B, C) với hai buổi A, B có thành viên C tham gia chung.

- Đếm theo số buổi (A, B) . Ta có $S \leq \binom{12}{2}$.
- Đếm theo thành viên, ta gọi a_1, a_2, \dots, a_n lần lượt là số buổi mà thành viên $1, 2, \dots, n$ tham gia. Bằng cách đếm số lượt tham gia ta có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 12 \cdot 24 = 288.$$

Khi đó

$$S = \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 288).$$

Từ hai cách đếm trên, ta suy ra được

$$\binom{12}{2} \geq S = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 288) \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq 420.$$

Nếu dùng Cauchy - Schwarz trực tiếp, ta có

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} = \frac{288^2}{n}.$$

Suy ra $n \geq 198$. Đánh giá này cải thiện rất nhiều, tuy nhiên chưa phải là kết quả cuối cùng (do không đạt được dấu bằng). Cần phải làm chặt hơn. Ta thấy với $n \geq 198$ thì được $\left\lceil \frac{288}{n} \right\rceil = 1$, do đó dự đoán dấu bằng xảy ra khi các số a_i nhận giá trị là 1 hoặc

2. Như thế, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta đánh giá

$$(a_i - 1)(a_i - 2) \geq 0 \Rightarrow a_i^2 \geq 3a_i - 2, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đây ta được

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &\geq (3a_1 - 2) + (3a_2 - 2) + \dots + (3a_n - 2) \\ &= 3(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - 2n \\ &= 3 \times 288 - 2n. \end{aligned}$$

Từ đây tìm được $n \geq 222$. Mặt khác, vì đẳng thức xảy ra khi có 156 số a_i bằng 1 và 66 số a_i bằng 2, nên giá trị nhỏ nhất của n bằng 222. \square

Dưới đây là một số bài tập dành cho học sinh có hoài bão.

BÀI TẬP 14. Trong một bảng ô vuông kích thước 999×999 , trong đó một số ô vuông đơn vị được tô bởi màu trắng và những ô còn lại được tô bởi màu đỏ. Gọi T là số bộ ba các ô (C_1, C_2, C_3) , sao cho C_1, C_2 cùng một dòng, và C_2, C_3 cùng một cột, với C_1, C_3 màu đỏ, và C_2 màu trắng. Tìm giá trị lớn nhất của T .

BÀI TẬP 15. Một câu lạc bộ có n thành viên và họ đã tham gia vào 10 buổi chuyên đề, mỗi buổi có 7 thành viên tham gia. Biết rằng hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

BÀI TẬP 16. Cô giáo có tất cả 2016 viên kẹo thuộc về k loại kẹo khác nhau. Cô chia cho các học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận được nhiều hơn một viên kẹo ở cùng một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kỳ so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kỳ đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M . Xác định giá trị nhỏ nhất của M với $k = 63$? với $k = 64$?

BÀI TẬP 17. Trên mặt phẳng cho tập hợp A gồm 6 điểm phân biệt và tập hợp B gồm 16 đường thẳng phân biệt. Gọi m là số bộ (a, b) sao cho $a \in A, b \in B, a \in b$. Chứng minh rằng $m \leq 159$.

BÀI TẬP 18. Có 8 cái hộp, mỗi hộp chứa 6 trái banh. Tìm số n nhỏ nhất sao cho mỗi trái banh tùy ý đều được tô bởi một trong n màu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- Trong mỗi hộp, không có hai trái banh nào được tô cùng một màu;
- Hai hộp bất kỳ có chung nhau không quá 1 màu.

BÀI TẬP 19. Trong một kỳ thi có 11 thí sinh tham gia giải 9 bài toán. Hai thí sinh bất kỳ giải chung với nhau ≤ 1 bài toán. Tìm số k lớn nhất sao cho mọi bài toán đều có ít nhất k thí sinh giải được.

BÀI TẬP 20. Cho tập hợp S hữu hạn và A_1, A_2, \dots, A_{50} là 50 tập con của S thỏa mãn $|A_i| > \frac{|S|}{2}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng tồn tại 5 phần tử của S mà mọi tập A_i đều chứa ít nhất 1 trong 5 phần tử đó.

BÀI TẬP 21. Cho tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 2019\}$ và S_1, S_2, \dots, S_{410} là các tập con của S sao cho với mọi phần tử $i \in S$, tồn tại đúng 40 tập hợp chứa i . Chứng minh rằng tồn tại các chỉ số $j, k, l \in \{1, 2, \dots, 410\}$ đôi một phân biệt sao cho $|S_j \cap S_i \cap S_k| \leq 1$.

- Những thông tin cần được bảo mật: Không có
- Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến:

-
- Học sinh lớp 10, 11, 12 ôn thi học sinh giỏi cấp tỉnh và cấp quốc gia. Học sinh có năng khiếu cấp trung học cơ sở và học sinh giỏi có nhu cầu thi chọn đội tuyển thi quốc tế.
 - Về giáo viên: là những giáo viên có năng lực, trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi ôn thi các cấp trung học cơ sở và trung học phổ thông. Giáo viên sử dụng đề tài luôn phải tìm tòi để phát hiện những đối tượng thay đổi trên nền tảng đã biết.

Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả

Qua khai thác, nghiên cứu và hoàn thiện đề tài: “Khai thác phương pháp đếm bằng hai cách trong giải toán tổ hợp dành cho học sinh giỏi” tôi thu được kết quả sau:

- Học sinh tiếp cận nội dung và kiến thức mới một cách dễ dàng và có thể tự nghiên cứu được các vấn đề mới có liên quan tổ hợp.
- Không khí nghiên cứu nghiêm túc, nhiều em học sinh đã nắm bắt được vấn đề. Khả năng tư duy suy luận của học sinh được phát huy tốt. Nhiều em đã đề xuất các kết quả tương tự, mở rộng và vận dụng được cách làm trên để thực hành hiệu quả trong các bài toán tương tự.
- Học sinh có hứng thú học tập hơn với môn Toán, thấy được vẻ đẹp của các bài toán tổ hợp và những kết quả của chúng trong thực tế.
- Giảm thời gian giáo viên dạy bồi dưỡng, thay vào đó học sinh có thể tìm tòi nghiên cứu ở nhà và hoàn thành được phần lớn chuyên đề.
- Phản hồi tích cực của các giáo viên ở các trường trực tiếp ôn thi học sinh giỏi. Đặc biệt các trường cấp 2 ôn thi các học sinh năng khiếu các em tiếp cận rất hiệu quả và hứng khởi.

Danh sách những giáo viên môn Toán đã tham gia áp dụng sáng kiến trong quá trình giảng dạy ôn thi học sinh giỏi

Số TT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	Lê Đăng Thị	1984	THPT Chuyên Quang Trung	Giáo viên	Thạc sĩ	Áp dụng đề tài
2	Nguyễn Tất Thu	1980	THPT Chuyên Lương Thế Vinh	Tổ Phó	Thạc sĩ	Áp dụng đề tài
3	Kiều Đình Minh	1979	THPT Chuyên Phú Thọ	Tổ Phó	Thạc sĩ	Áp dụng đề tài
4	Nguyễn Thị Mai	1985	THCS Tân Phú	Hiệu Phó	Cử Nhân	Áp dụng đề tài
5	Huỳnh Chí Hào	1964	THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu	Giáo viên	Thạc sĩ	Áp dụng đề tài

Chúng tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Đồng Xoài, ngày 08 tháng 12 năm 2018
Người nộp đơn

TRẦN MINH HIỀN
Điện thoại liên hệ: 0903.073.673
Địa chỉ email: hiencqt@gmail.com

Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tổ chức, cá nhân đã tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu, kể cả áp dụng thử

Đánh giá của tổ Toán trường THPT chuyên Quang Trung

.....

.....

.....

.....

.....

.....

XÁC NHẬN CỦA TỔ CHUYÊN MÔN

Đánh giá của Trường THPT chuyên Quang Trung - nơi tôi áp dụng sáng kiến

.....

.....

.....

.....

.....

.....

XÁC NHẬN CỦA NHÀ TRƯỜNG